第四篇 振动 波动 光学

第13章 机械振动

1. 振动是一种重要的运动形式。

2. 振动有各种不同的形式

机械振动：位移 x 随时间 t 的往复变化

电磁振动：电磁量随 t 的往复变化

广义振动：任一物理量在某一数值附近反复变化。

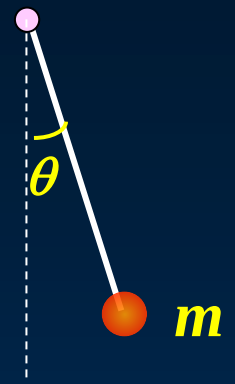
振动分类
- 受迫振动
- 自由振动
  - 阻尼自由振动
  - 无阻尼自由振动
    - 非谐振动
    - 简谐振动

13-1 简谐振动

一、简谐振动

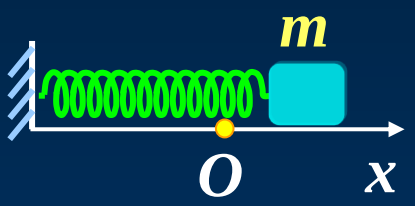
定义： $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

x 是描述位置的物理量，如 y，z 或 θ 等。

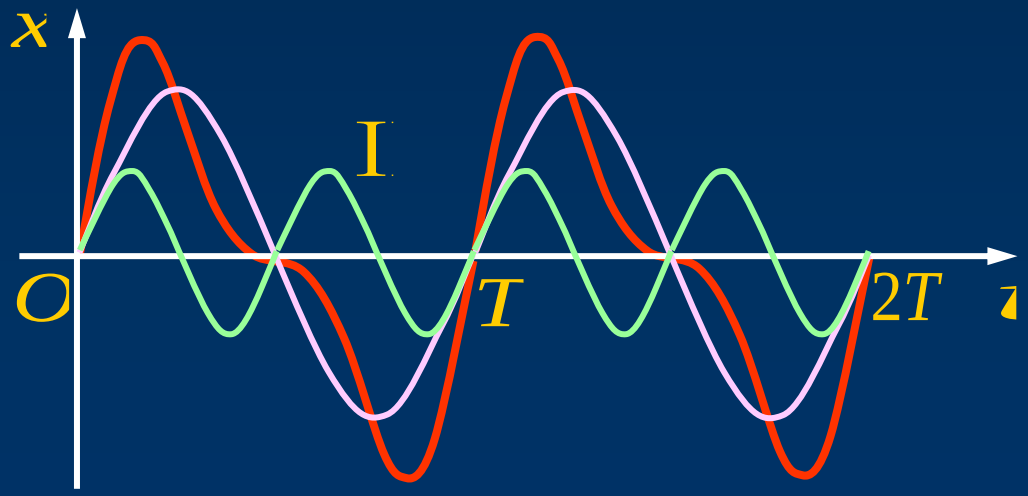


特点： (1)等幅振动，

(2)周期振动 $x(t) = x(t+T)$ 。



研究简谐振动的意义：

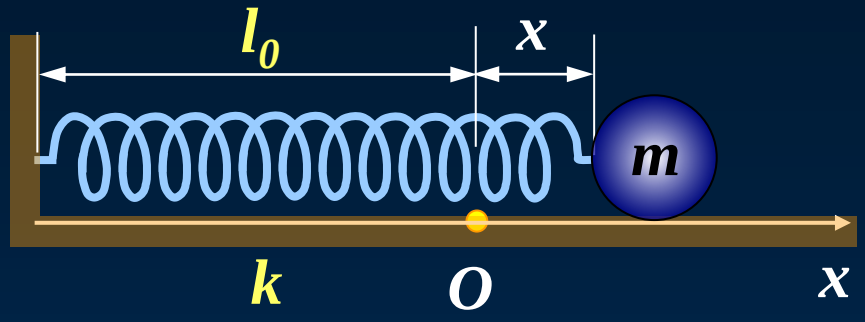


◆ 弹簧振子模型

1. 受力特点

简谐振动的动力学特征

线性恢复力 $F = -kx\vec{i}$



2. 动力学方程

$$F = -kx = ma$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

运动微分方程

其中 ω 为 **固有**角频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3. 速度和加速度

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi) = \omega A\cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \phi + \pi)$$

二、描述简谐振动的特征量 $x = A\cos(\omega t + \phi_0)$

1. 周期 T —— 表征振动的周期性，由振子固有性质确定

$$x = A\cos(\omega(t+T)+\phi_0) = A\cos(\omega t+\phi_0)$$

$$\Rightarrow \quad \omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

2. 频率 $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

3. 振幅 A —— 表征振动的强弱，其大小由初始条件确定

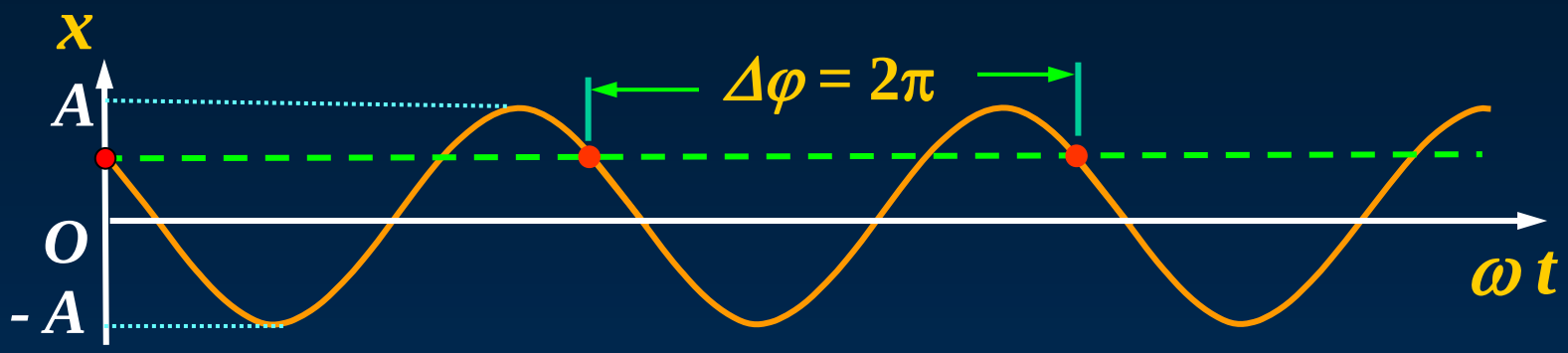
★4. 相位
- $\omega t + \phi_0$ —— t 时刻的相位（Phase）
- ϕ_0 —— t =0 时的相位 —— 初相

◆ 相位确定了振动的状态。

例：当 $\omega t + \phi = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $x = 0$ $\quad \dot{x} = v = -A\omega$

当 $\omega t + \phi = \frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $x = 0$ $\quad \dot{x} = v = A\omega$

◆ 相位每改变 2π 振动重复一次，相位 2π 范围内变化，状态不重复。

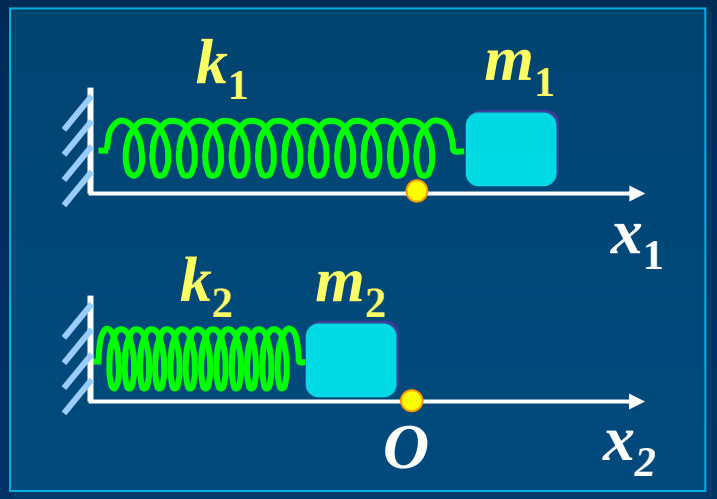


◆ 相位差

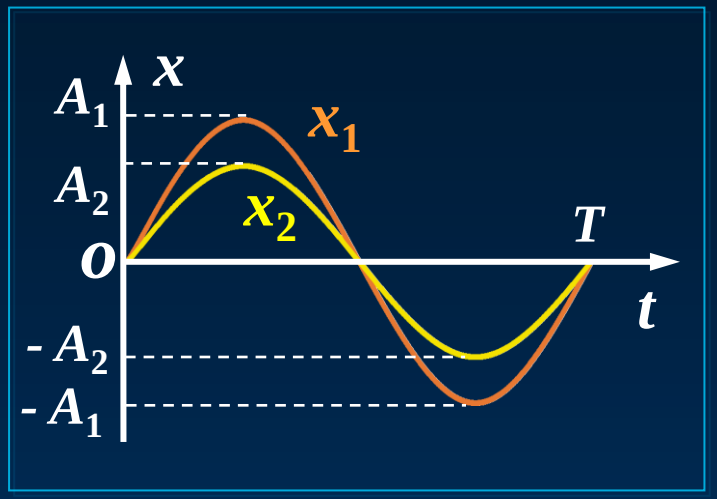
$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\Delta\phi = (\omega_2 t + \phi_2) - (\omega_1 t + \phi_1)$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (\text{当}\omega_2 = \omega_1\text{时})$$

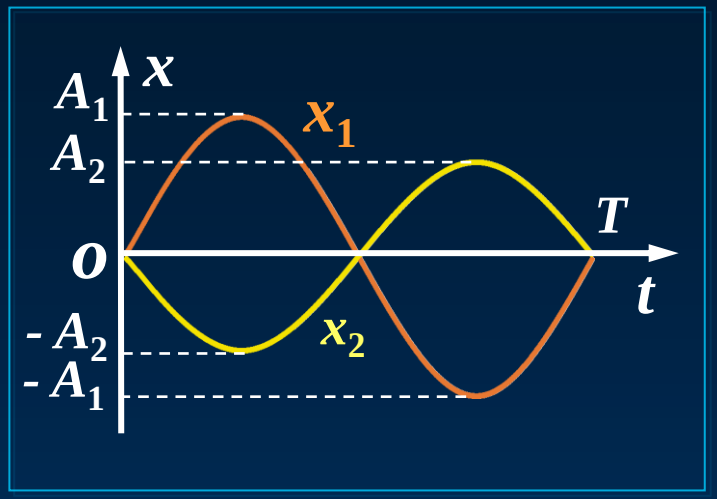


若 $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \pm 2k\pi$



两振动步调相同，称同相。

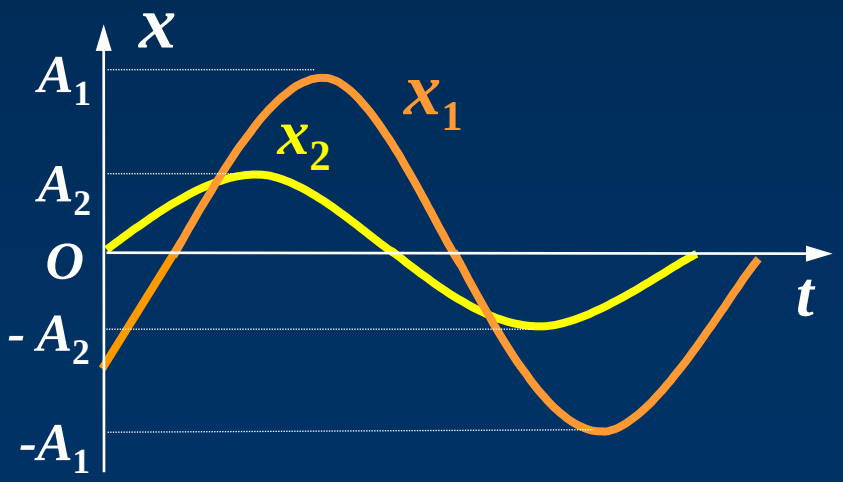
若 $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \pm(2k+1)\pi$



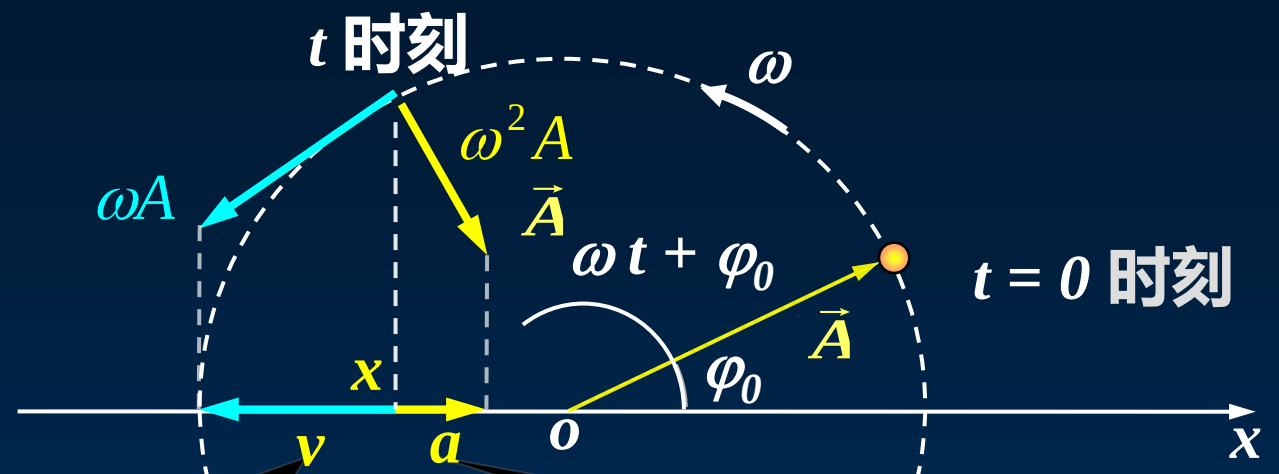
两振动步调相反，称反相。

- 超前和落后

若 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$，则 x_2 比 x_1 早 $\Delta\varphi$ 达到正最大，称 x_2 比 x_1 超前 $\Delta\varphi$ (或 x_1 比 x_2 落后 $\Delta\varphi$)。



三、 旋转矢量法 —— 几何直观法



$$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

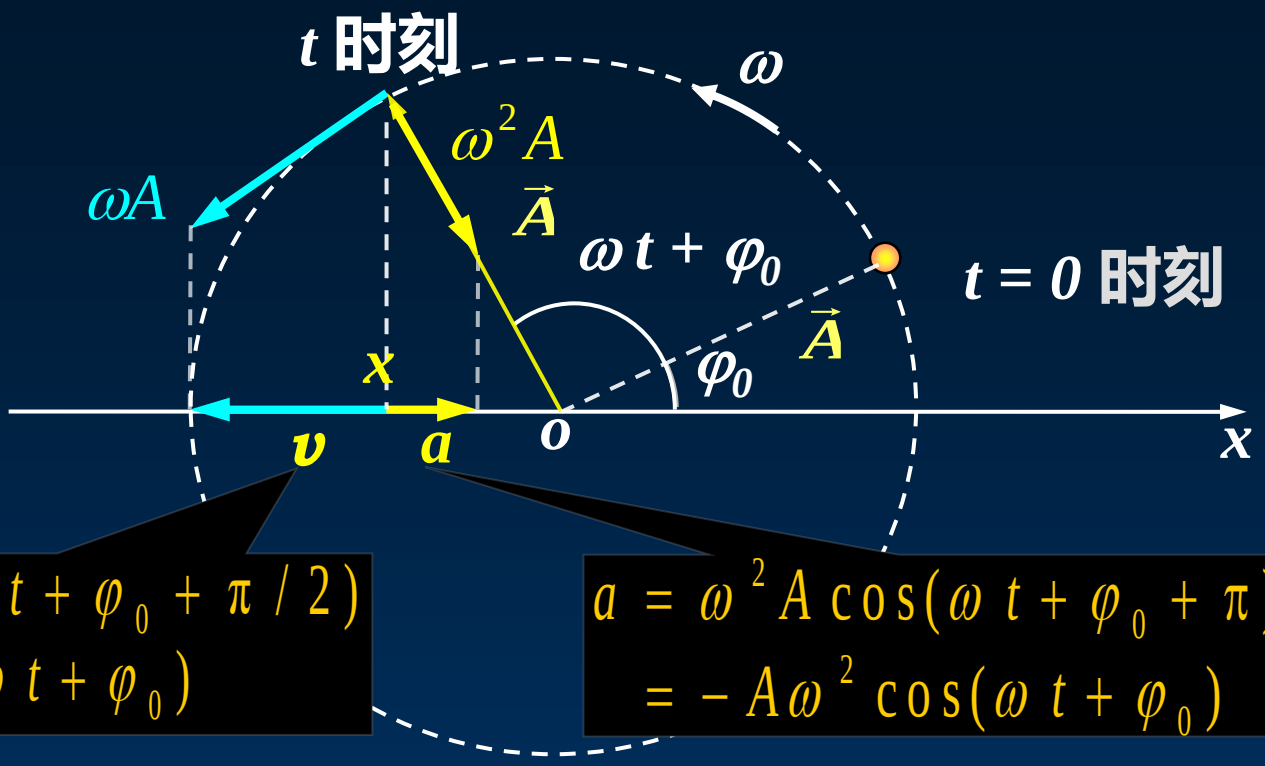
圆周运动小球

位置 —— x 轴投影 → 坐标

速度 → 速度

加速度 → 加速度

谐振动物体



$$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

圆周运动小球

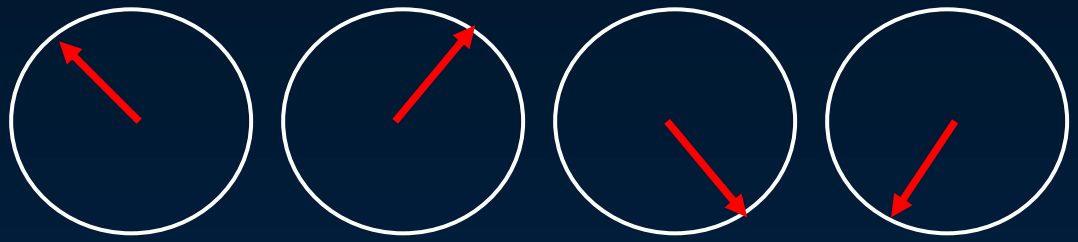
半径 → 振幅

角速度 → 角频率

$\vec{A}$与x 轴夹角 → 相位

谐振动物体

问题：质点在A/2 处，向 x 正向运动



四、 振幅和初相的确定

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v = \dfrac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 \end{cases}$$

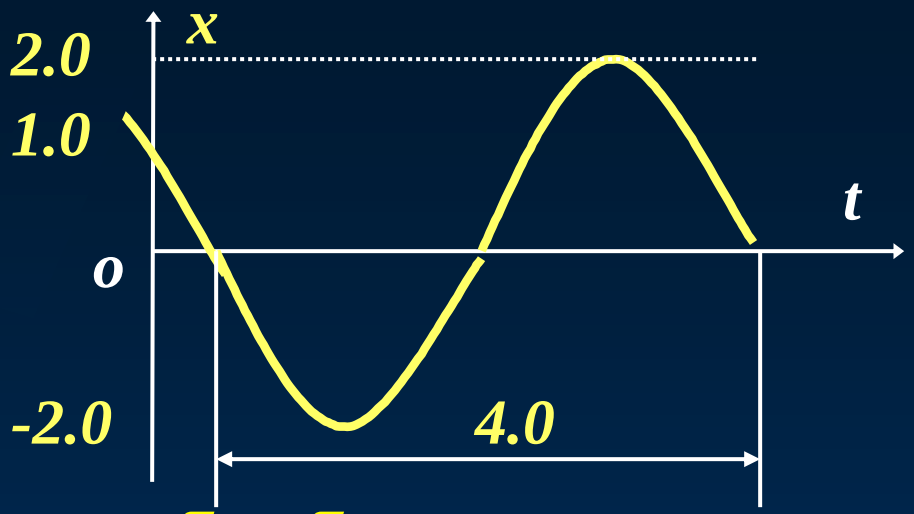
振幅 $$A = \sqrt{x_0^{\,2} + \frac{v_0^{\,2}}{\omega^2}}$$

初相 $$\varphi_0 = tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

—— 由初始条件和固有性质确定

例1：有一振动曲线，如图示。试求物体振动方程和第一次通过零值的时间。

解： (1) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$



$$x = 2.0\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \varphi\right)$$

$t = 0 \Rightarrow x = 1.0$

$$1.0 = 2.0\cos\varphi \Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = -\omega A\sin\varphi < 0$$

$$x = 2.0\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)(SI)$$ —— 运动学方程

解： (2) $x = 0 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

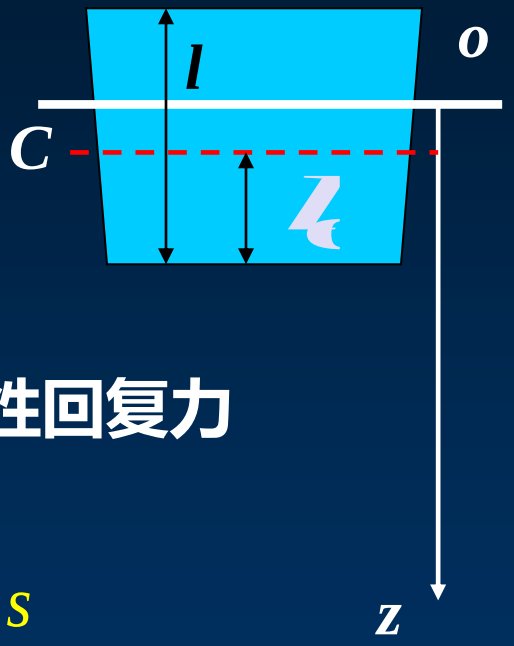
$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{1}{3}(SI)$$

例2： 一船模浮在水中，其平均水平截面积为 $S = 0.1m^2$，材料平均密度为 $\rho = 800kg/m^3$，竖直高度 $l = 0.3m$。今将其竖直压入水中，然后放手。求振动方程？

解： 初始时，浮力与重力平衡

$$l_0 S\rho' g = lS\rho g \rightarrow l_0 = \frac{l\rho}{\rho'} = 0.24m$$



当船模运动在任意位置，受力

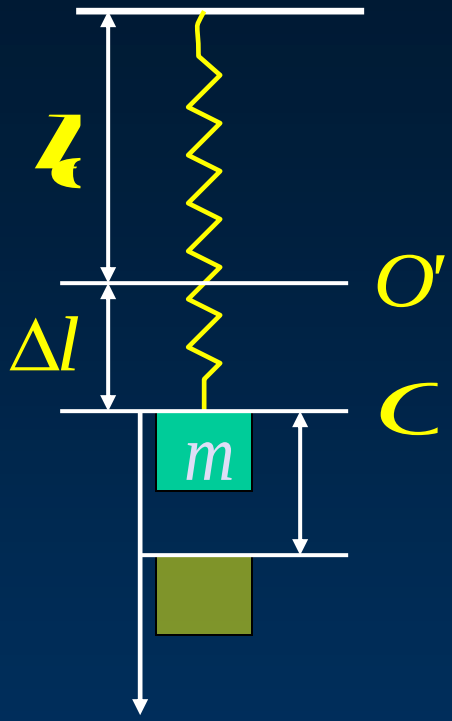
$$f = -(l_0 + z)\rho' Sg + lS\rho g = -S\rho' gz$$ 线性回复力

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\rho' gz}{\rho l} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\rho' g}{\rho l}} = 6.4rad/s$$

$$z = A\cos(\omega t + \varphi) \quad (SI)$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{z_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} = z_0 \\ \phi = tg^{-1}\left(-\dfrac{v_0}{\omega z_0}\right) = 0 \end{cases}$$

例3：竖直方向的弹簧振子，求振动方程。



解：分析系统受力

线性回复力

$$\sum f_i = mg - k(\Delta l + x) = mg - k\Delta l - kx = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- 该运动是谐振动
- 重力改变平衡位置

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$= 0.17\cos(\omega t - 0.939)m$$

- 初始条件：

$x_0 = 10cm$

$v_0 = 2.4m/s$

$m = 0.4kg$

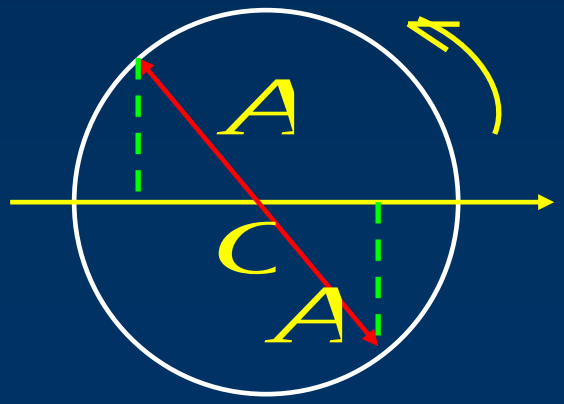
$k = 0.175N/cm$

- 旋转法分析

$\omega = 6.61Hz$

$A = 0.17m$

$\varphi = -53.8^0, 126.2^0$



讨论： 已知

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k} = \frac{2}{k}\left(\frac{k}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$$

振子的初始弹性势能

振子的初始动能

谐振动的物理特征

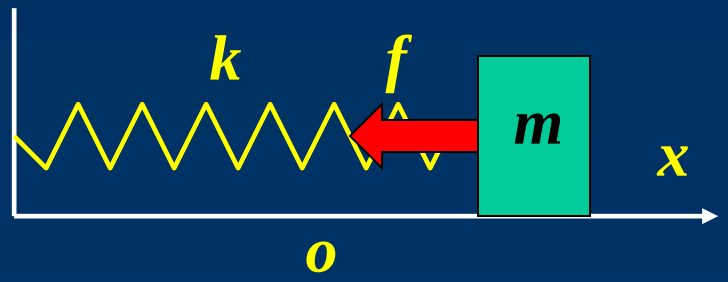
- 谐振动振幅决定于振动的总能量
- 谐振动周期决定于振动系统固有性质

反映振动强度

五、谐振动能量

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\begin{cases} E_P = \dfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) \\ E_K = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

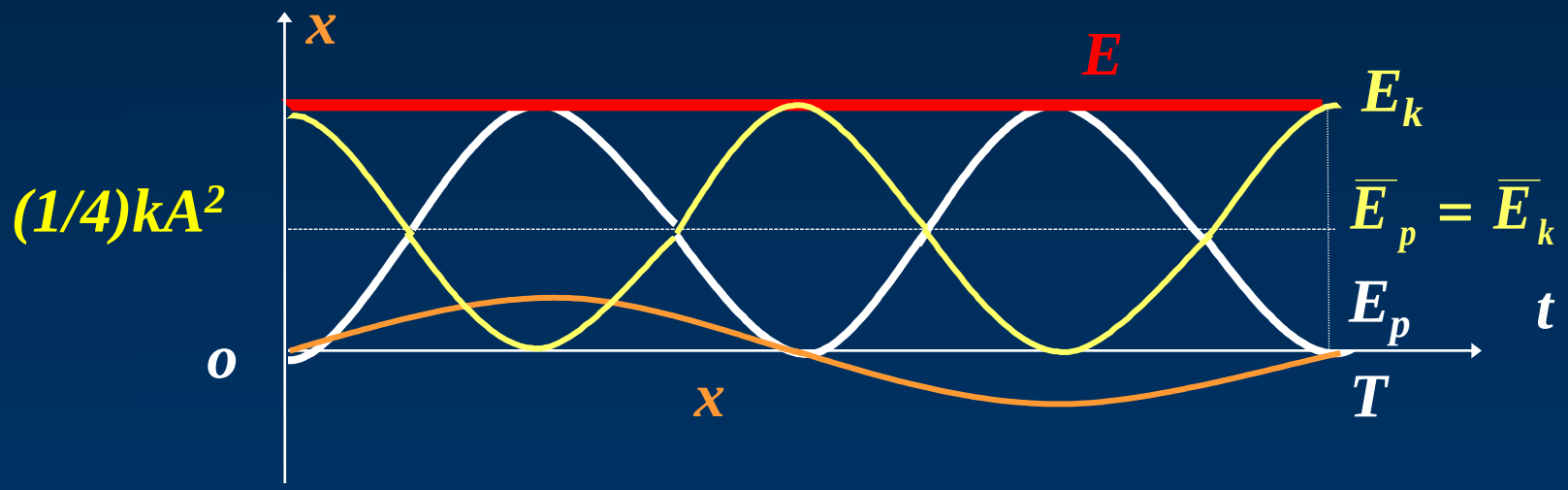


讨论： 1. 谐振动系统的动能和势能在一个周期内的平均值：

$$\overline{F}=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$$

$$\overline{E}_P=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kx^2dt=\frac{1}{4}kA^2=\frac{1}{2}E_0$$

$$\overline{E}_k=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}mv^2dt=\frac{1}{4}kA^2$$



2. 在谐振动中，系统的机械能保持不变

3. 由能量关系建立谐振动方程